OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1910. N° 5

NOTES SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

VIII.

SUR LA CONSTITUTION DES LIVRES ARITHMÉTIQUES DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ET LEUR RAPPORT À LA QUESTION DE L'IRRATIONALITÉ

PAR

H.-G. ZEUTHEN

(PRÉSENTÉ A LA SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1910)

M. H. Vogt vient de publier[1] un mémoire fort intéressant sur l'histoire de la découverte des quantités irrationnelles telle qu'on peut la tirer des écrits de Platon et d'autres sources du IVe siècle, et sur les modifications successives de la nomenclature relative à ces quantités. Il cite en particulier les répliques connues du Théétète. Comme ces mêmes répliques feront l'objet des recherches que nous allons exposer ici, je crois bon de commencer par les citer:

ΘΕΑΙ. Ῥᾴδιον, ὦ Σώκρατες, νῦν γε οὕτω φαίνεται· ἀτὰρ κινδυνεύεις ἐρωτᾶν οἷον καὶ αὐτοῖς ἡμῖν ἔναγχος εἰσῆλθε διαλεγομένοις, ἐμοί τε καὶ τῷ σῷ ὁμωνύμῳ τούτῳ Σωκράτει.	Th. Ainsi la réponse sera assez facile. Ta question concerne, si je ne me trompe, quelque chose de semblable à ce qui vient de se présenter au cours de la discussion à nous-même, à moi et à ton homonyme, Socrate.
ΣΩ. Τὸ ποῖον δή, ὦ Θεαίτητε;	Socr. Qu'était-ce donc?

[1] Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts. — Bibliotheca Mathematica X3 p. 97—155.

ΘΕΑΙ. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος, ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ ξύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

Th. Pour l'étude des carrés Théodore nous avait fait des figures afin de montrer sur les carrés dont les aires étaient de 3 ou 5 pieds carrés que leurs côtés ne sont pas commensurables au côté du carré de l'aire 1. Il avait fait la même chose pour chacun des carrés jusqu'à celui de 17 pieds carrés. Il s'arrêta là. Alors nous vint à l'esprit quelque chose de semblable (à ce qui fait l'objet de votre interrogation); comme le nombre des carrés est infini, nous avons essayé de comprendre dans une seule expression les propriétés de tous ces carrés.

ΣΩ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

Socr. Et en avez vous trouvé une?

ΘΕΑΙ. Ἔμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δέ καὶ σύ.

Th. Je le crois; jugez-en vous-même!

ΣΩ. Λέγε.

Socr. Veuillez nous l'exposer.

ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

Th. Nous divisions tous les nombres en deux classes. Ceux qui résultent de la multiplication de deux nombres égaux, nous en comparions la figure à un carré et nous les appelions carrés ou équilatéraux.

ΣΩ. Καὶ εὖ γε.

Socr. Bien.

ΘΕΑΙ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τού-

Th. Ceux qui sont entre

του, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

les nombres carrés, et auxquels appartiennent aussi 3 et 5 et tout autre nombre qui n'est pas le produit de deux facteurs égaux mais résulte soit de la multiplication d'un nombre plus grand par un nombre plus petit, soit d'un nombre plus petit par un nombre plus grand, nous les représentions par la figure d'un rectangle parce qu'ils sont compris entre un côté plus grand et un côté plus petit, et nous les appelions nombres rectangulaires.

ΣΩ. Κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

Socr. Très bien; mais à quoi nous conduit tout cela?

ΘΕΑΙ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ ξυμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

Th. Toutes les droites qui sont côtés d'équilatéraux et de nombres carrés, nous les définissions comme des longueurs, mais les côtés des nombres rectangulaires sont définis comme des puissances parce que leurs longueurs n'ont aucune mesure commune avec celles-la, mais seulement leurs carrés. Et nous avons fait des conventions semblables pour les quantités stéréométriques.

ΣΩ. Ἄριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες.

Socr. Excellent, mes enfants.

M. VOGT nous montre bien que, tout en étant une fiction poétique, le dialogue nous donne ici un véritable exposé historique des contributions apportées par Théodore de Cyrène et par Théétète à la découverte de l'irrationalité. Il constate donc que, selon Platon, Théodore a découvert, ou du moins a le premier démontré, l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ — sans doute d'une manière qui resterait applicable aussi aux racines carrées d'autres nombres non carrés — et que Théétète a trouvé une démonstration comprenant à la fois les racines carrées de tous les nombres non carrés.[1]

M. VOGT en tire la conclusion que les prédécesseurs de Théodore et en particulier les Pythagoriciens n'ont connu d'autres quantités irrationnelles que $\sqrt{2}$, ou bien, dans le langage des géomètres grecs, que le rapport de la diagonale d'un carré à son côté. Il le croit même possible que les Pythagoriciens aient vu dans cette irrationalité une exception unique et aient regardé comme simplement subjective l'impossibilité d'exprimer en nombres les valeurs d'autres racines carrées.[2]

A première vue on croirait légitime sa conclusion générale. Neanmoins l'usage des conclusions de cette nature demande, dans l'histoire des mathématiques, les plus grandes précautions. Ceux qui rapportent la découverte d'une vérité nouvelle l'attribuent le plus souvent à celui qui en a achevé la démonstration sans rappeler ce qui avait déjà été fait à cet égard par ses prédécesseurs. Ils en ont le droit formel; car la vérité n'est pas constatée tant qu'il manque un seul terme de sa démonstration; mais il n'est pas permis pour cela d'attribuer tout l'honneur de la découverte à celui qui a fait le dernier

[1] Il va sans dire que, dans sa profonde étude sur la Constitution des Éléments d'Euclide (Bulletin des Sciences mathématiques 1886 p. 183—194; La Géométrie grecque 1887, p. 95—107), PAUL TANNERY a tenu compte des mêmes répliques, lesquelles n'ont pas été non plus négligées par d'autres auteurs; mais M. VOGT va plus loin dans les conclusions qu'il en tire.

[2] L. c. p. 133 l. 34.

pas. Souvent même ce dernier progrès que nous transmet notre source ne consiste que dans la forme donnée alors à une vérité que de notre temps nous reconnaîtrions aussi bien sous sa forme antérieure. Ce sont des témoignages de cette nature qui ont fait douter que l'on connût avant Apollonios des représentations de coniques équivalentes (si on les traduit dans notre langage algébrique) aux équations par lesquelles on rapporte à présent les courbes aux axes ou à des diamètres conjugués, ou la nature de sections planes quelconques d'un cône: et pourtant Archimède possédait déjà ces connaissances. Souvent aussi nous reconnaîtrions volontiers la nécessité logique de ce dernier pas que notre source regarde comme la véritable découverte de la vérité; mais néanmoins il nous intéresse d'en connaître les précédents sur lesquels notre texte ne nous apprend rien. A cet égard il suffit de rappeler que dans la préface de son traité sur „La Sphère et le Cylindre" Archimède[1] nous dit que les théorèmes sur les volumes de la pyramide et du cône étaient inconnus à tous les géomètres avant Eudoxe, et que le même Archimède avait dit dans sa méthodologie, récemment retrouvée par M. Heiberg[2], qu'il faut attribuer à Démocrite une part assez notable dans ces théorèmes qu'il avait énoncés le premier, tandis qu'Eudoxe en avait trouvé le premier les démonstrations. Ici Archimède nous explique pourquoi il n'attribue la véritable découverte des théorèmes en question qu'à Eudoxe, l'inventeur de la démonstration d'exhaustion; mais ses propos dans „La Sphère et le Cylindre" laissaient ignorer les véritables mérites de Démocrite, dont la démonstration à suffi sans doute, malgré ses défauts logiques reconnus plus tard, pour persuader de la justesse des résultats — de même que beaucoup plus tard on s'est contenté des démonstrations de Cavallieri, peu différentes de celle qu'il faut attribuer à Démocrite.

[1] 2e édition par M. Heiberg I p. 4.
[2] Bibliotheca mathematica VII3 p. 323.

Ceci considéré, il faut, pour tirer les justes conclusions du témoignage de Platon, examiner avec soin quelle portée peuvent avoir eue les progrès dont il parle. Ce qui rend possible une telle recherche, c'est notre connaissance de la théorie sur l'irrationalité des racines à laquelle Théétète a apporté les derniers perfectionnements. En effet, ce doit être celle que nous trouvons dans les Éléments d'Euclide, abstraction faite des continuations et adaptations dues à l'auteur de ce livre fameux. Nous devons retrouver la théorie de Théétète parmi les pierres dont le bâtiment d'Euclide est composé.

L'étude que je vais faire de ces Éléments me conduira à des conclusions assez différentes de celles de M. Vogt.[1] La présente note prend ainsi en quelque sorte la forme d'une polémique avec le savant allemand, et cette forme me permettra de préciser mes vues en les opposant aux siennes; mais personnellement je lui suis plutôt reconnaissant de m'avoir, par son article si important au point de vue philologique et par des explications qu'il fallait tenter, mais qui ont selon moi conduit à des résultats inadmissibles, invité à reprendre mes propres recherches sur les mêmes questions. A cette occasion j'ai pu me rendre compte que mes jugements antérieurs[2] sur les livres arithmétiques d'Euclide VII—IX, partagés du reste, je crois, par la plupart des historiens, avaient besoin d'une révision. —

C'est dans le X^e^ livre qu'Euclide traite des grandeurs irrationnelles, et il commence ce livre par la définition des quantités commensurables (*σύμμετρα*) et incommensurables (*ἀσύμμετρα*), expressions qui, d'après les recherches de M. Vogt, ont été introduites dans la terminologie mathématique par

[1] M. Junge s'est prononcé dans un sens analogue à celui de M. Vogt dans un mémoire inséré aux Novae Symbolae Joachimicae (1907) et intitulé: Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt.

[2] Voir mon Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-âge. Edition danoise 1893, p. 137; édition allemande 1896, p. 156; édition française 1902, p. 128.

Théodore et qu'on trouve aussi dans le dialogue cité de Platon (à la seule différence que „incommensurable" est appelé „non commensurable"). Il est donc naturel de commencer par chercher dans ce Xe livre la contribution de Théétète — et même celle de Théodore si l'innovation de Théétète ne l'a pas rendue superflue. Mais afin de bien comprendre le renvoi à des résultats obtenus dans les livres précédents, nous ferons précéder cette recherche de quelques remarques préliminaires sur les rapports que le Xe livre présente avec ces résultats.

Le Ve et le VIe livres contiennent la théorie générale des proportions et son application à la géométrie. Elle est générale en ce sens que, grâce au postulat d'Eudoxe (souvent appelé postulat d'Archimède) contenu dans le l. V, définition 4 („on dit qu'il existe une raison entre deux quantités si un multiple de l'une vaut plus que l'autre"), elle est également applicable à toutes les quantités qu'on peut comparer, qu'elles soient commensurables ou incommensurables. Pour cette raison Euclide n'a pas même besoin dans ces livres de définitions servant à distinguer entre ces deux espèces de relations entre les quantités. C'est une autre circonstance qui l'exempte de définir la commensurabilité dans les livres VII—IX, lesquels traitent exclusivement de quantités commensurables. On n'y parle, en effet, que de quantités dont l'une est un multiple, „une part" ou „des parts" de l'autre, c'est-à-dire que le rapport de l'une à l'autre est un nombre entier, une fraction à numérateur 1 ou une autre fraction, et ainsi on peut remettre à plus tard une définition servant à distinguer ces quantités commensurables d'autres dont l'existence n'est pas encore établie et dont il n'est pas encore question. On y démontre les conditions nécessaires et suffisantes que demanderaient certaines opérations, en particulier l'intercalation de moyennes proportionnelles de même nature, c'est-à-dire commensurables elles aussi aux données, sans s'occuper de savoir ce qui arrivera si ces conditions ne sont pas remplies: alors les opérations sont donc regardées ici comme n'aboutissant à rien, ou comme n'aboutissant à rien dont on connaisse déjà l'existence.

Les termes des proportions dans ces livres sont donc des nombres entiers, ou réductibles à des nombres entiers; mais à cause de sa généralité la théorie des proportions du V[e] livre doit être applicable aussi à ce cas plus simple. On s'est donc étonné que néanmoins dans ces livres Euclide démontre de nouveau pour ce cas particulier une partie des proportions que, dans le V[e] livre, il avait déjà établies d'une manière générale. Afin d'expliquer le fait, on a supposé que la théorie contenue aux livres arithmétiques existait longtemps avant Euclide et avait été composée à une époque où Eudoxe n'avait pas encore inventé le moyen de construire une théorie des proportions indépendante des rapports des nombres entiers. On a donc vu là une tradition dont Euclide n'avait pu se débarrasser sans se priver aussi de théorèmes qui lui étaient indispensables et qu'on n'avait pas encore su rattacher à la nouvelle théorie créée par Eudoxe.

Nous reviendrons sur cette question; mais dès à présent il faut rappeler que ces livres font, à la place qu'ils occupent, partie intégrante du système d'Euclide, et quant au répétitions apparentes, les propositions sur les proportions y prennent un nouveau sens parce que ici il ne s'agit pas seulement de l'égalité des rapports, mais aussi de la possibilité de les réduire aux mêmes plus petits termes.[1]

Après ces préliminaires nous revenons au X[e] livre où on commence par retrouver une opération qu'on à déjà rencontrée dans le VII[e] livre, à savoir la détermination connue de la plus grande mesure. Dans ce livre-ci elle avait été appliquée à des nombres entiers, ou bien géométriquement à des

[1] A ce propos je puis encore renvoyer à mon Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et au Moyen-âge.

segments de droites formés par des reprises de la même unité, et dans le X^e livre on l'applique à des segments quelconques pour savoir s'ils ont une mesure commune, et pour la trouver en ce cas. A cette différence près, les n^os 3 et 4 du X^e livre sont identiques aux n^os 2 et 3 du VII^e livre. On y trouve la plus grande mesure respectivement de deux et de trois quantités données. A la première détermination Euclide rattache, dans les deux livres, le même corollaire important: une mesure commune de deux quantités est aussi mesure de leur plus grande mesure commune. Le corollaire correspondant sur trois quantités est ajouté au n^o 4 du X^e livre où Euclide indique aussi l'extension à plusieurs quantités, mais il manque au n^o 3 du VII^e.

L'usage des Grecs n'aurait pas permis à Euclide de proposer les problèmes résolus dans ces n^os sans donner à leurs énoncés des restrictions qui en garantissaient la possibilité, et ces restrictions devaient être différentes dans les deux livres à cause de leur but différent. Dans les énoncés des problèmes VII, 2 et 3 il demande que les nombres ne soient pas premiers entre eux, parce que l'unité n'est pas regardée, dans la théorie des nombres, comme mesure commune propre; et, dans les énoncés de X, 3 et 4, que les quantités soient commensurables. Toutefois ces restrictions ne serviraient à rien si l'on ne possédait pas déjà des critères pour décider si deux nombres sont premiers entre eux, et si deux quantités sont commensurables. Voilà pourquoi ces critères sont déjà donnés dans les n^os précédents, VII, 1 et X, 2, où on les obtient par le même procédé qui sert ensuite à la détermination de la plus grande mesure dans les cas où elle existe. Euclide a démontré en X, 2 que dans le cas où ce procédé ne conduit jamais à une quantité mesurant celle qui la précède immédiatement, les deux quantités dont on est parti sont incommensurables; mais pour constater ce résultat il faut savoir qu'en continuant alors le procédé assez loin on parviendra à un reste qui soit plus petit qu'une quantité arbitrairement donnée. Cela résulte du théorème 1, que voici: Deux quantités inégales étant données, si de l'une on enlève plus de sa moitié, et du reste plus de la moitié et ainsi de suite, on finira par parvenir à un reste plus petit que l'autre quantité donnée. Ce théorème est démontré au moyen du postulat d'Eudoxe (V, def. 4) dont nous avons déja parlé.

Les analogies et les divergences entre l'usage qui est fait du même procédé dans les deux livres d'Euclide mettent bien en lumière le nouvel aspect que les notions de commensurabilité et d'incommensurabilité devaient donner aux quantités irrationnelles, appelées avant Théodore ineffables (*ἄρρητος*) parce qu'il est impossible d'en exprimer la grandeur par des nombres. Sans doute on savait déjà appliquer les opérations purement géométriques telles qu'on les trouve dans les 4 premiers livres d'Euclide aussi à ces quantités ineffables; mais l'extension aux quantités irrationnelles des propriétés qui, pour les quantités qu'on peut exprimer par des nombres, dépendent des rapports de ces nombres devait être suspecte. On avait besoin de procédés s'appliquant directement aussi aux quantités irrationnelles. De même qu'au commencement du X^e^ livre, les notions nouvelles ont été probablement, dès leur introduction par Théodore de Cyrène, présentées conjointement avec l'application des procédés connus pour les quantités numériques à la comparaison des quantités irrationnelles. La continuation des mêmes efforts a conduit d'un côté à la théorie générale des proportions (Euclide V) et de l'autre aux règles pour la représentation géométrique des différentes quantités dont l'irrationalité dépend — dans notre langage mathématique — de racines carrées. Ces règles se trouvent dans le X^e^ livre. La représentation géométrique était nécessaire pour les mathématiciens grecs qui font des figures géométriques un usage semblable à celui que l'on fait à présent des formules algébriques.

Une seule considération pourrait faire hésiter à attribuer à Théodore les procédés et les résultats contenus dans les propositions déjà citées d'Euclide X. En effet, nous avons vu que l'exactitude de la démonstration dépend du postulat d'Eudoxe, qui n'était qu'un successeur de Théodore. A cette objection on peut répondre en envisageant plusieurs possibilités. Il est possible que Théodore n'ait pas encore atteint l'exactitude complète, et même que ses défauts à cet égard aient incité Eudoxe à chercher une base plus solide. Étant donné que les progrès mathématiques sont ordinairement „dans l'air“ avant qu'on leur trouve une forme définitive, il est possible aussi que Théodore ait résolu d'une manière partielle une difficulté que, par une formule particulière, Eudoxe à surmontée plus tard à la fois pour la question d'incommensurabilité, pour les proportions et pour les recherches infinitésimales; Théodore peut par exemple avoir postulé immédiatement la proposition X, 1 que plus tard on a pu regarder comme une conséquence du postulat d'Eudoxe.

Les n^{os} déjà cités du X^e livre nous ont appris les critères des quantités commensurables et incommensurables; mais existe-il des quantités satisfaisant à ces critères? La réponse est facile pour les quantités commensurables. Euclide démontre en effet dans X, 5 et X, 6 que le rapport de deux quantités commensurables est celui de deux nombres, et le théorème inverse. Les quantités commensurables sont donc identiques a celles dont il s'est déjà occupé dans les livres VII—IX. Les théorèmes négatifs (7 et 8) sur les quantités incommensurables qui correspondent à 5 et 6 ne disent encore rien sur l'existence de telles quantités; mais pour qu'on apprenne déjà à connaître certaines quantités irrationnelles, à savoir celles dont il va démontrer l'irrationnalité dans le n^o 9, il ajoute au n^o 6 le „corollaire“ suivant, dont seule l'introduction est un corollaire proprement dit, tandis que sa partie principale est la démonstration d'un nouveau théorème[1]:

„Il s'ensuit que deux nombres δ, ε et une droite α étant donnés on peut déterminer une autre droite ζ telle que $\delta:\varepsilon=\alpha:\zeta$. Soit β la moyenne proportionnelle des droites α et ζ; alors $\alpha:\zeta=\alpha^2:\beta^2$, c'est à dire: le rapport du 1er des trois termes [d'une proportion continue] au 3e est égal à celui de deux figures semblables construites sur le 1er et le 2e. Or $\alpha:\zeta=\delta:\varepsilon$; par conséquent $\delta:\varepsilon=\alpha^2:\beta^2$ — ce qu'il fallait démontrer."

L'existence des quantités que nous écririons $a\sqrt{\frac{p}{q}}$, où a est un segment, p et q des nombres entiers, est donc établie par une construction géométrique. La commensurabilité et l'incommensurabilité avec a des quantités qu'on peut exprimer ainsi ferait, d'après l'exposition ordinaire d'Euclide, l'objet de deux paires de théorèmes inverses entre eux. Euclide les réunit dans un seul énoncé et en donne ensuite une démonstration très sommaire, où il est même assez difficile de découvrir le point le plus essentiel, à savoir cette circonstance que le rapport composé de deux rapports égaux à celui de deux nombres γ et δ premiers entre eux est égal à celui de deux nombres carrés γ^2 et δ^2 premiers entre eux. Cette indication est en effet contenue dans le renvoi au VIIIe livre, où les termes des rapports sont toujours réduits à leurs plus petites valeurs.

Le corollaire du no 6 et le no 9, où nous venons de trouver la construction des expressions $a\sqrt{\frac{p}{q}}$, ou plus particulière-

[1] Sur ces porismes-corollaires impropres, voir P. Tannery: „La technologie des Éléments d'Euclide" (Bulletin des Sciences mathématiques 1887 p. 28, et „La Géométrie grecque" p. 153).

Les extraits des Éléments qu'on trouvera dans le présent article sont faits d'après l'édition de M. Heiberg. Ils sont en général très courts et traduits dans la langue des mathématiques modernes. On trouvera des traductions plus complètes dans T. L. Heath: The thirteen books of Euclids Elements. Cambridge 1908. Cet ouvrage élaboré avec tant de soin contient aussi un grand nombre de renseignements historiques et dans des „Introductory Notes" des aperçus sur la connexion et le but des théories enseignées dans plusieurs des livres; mais on n'y trouve aucune indication semblable pour les livres VII — IX, dont nous aurons à nous occuper particulièrement.

ment $a\sqrt{p}$, et le théorème sur l'irrationalité de ces quantités si p et q, étant premiers entre eux, ne sont pas des nombres carrés, contiennent immédiatement les résultats que Platon attribue à Théétète. Or la dite construction (6 cor.) ne pouvait guère être nouvelle au temps de Théétète. On était même parvenu plus loin à cette époque, ce qui résulte des renvois que nous ferons plus tard à Hippocrate de Chios et à Archytas. Néanmoins si, comme le suppose M. Vogt, Théodore a construit $a\sqrt{p}$ au moyen du théorème de Pythagore, ce qui, conformément aux répliques du dialogue, aurait demandé différentes constructions pour chaque valeur de p, l'usage général des moyennes proportionnelles indiquerait un certain progrès systématique; mais la construction elle-même n'était nullement une innovation digne de l'éloge de Platon.

Il faut donc en chercher la justification au nº 9, ce qu'on fait aussi ordinairement, et ce qu'on a déjà fait dans l'antiquité.[1] Cependant pour mériter cet éloge, qui lui attribue la découverte de l'irrationalité des racines carrées de tous les nombres non carrés, bien que les Pythagoriciens aient dû la supposer après avoir découvert celle de $\sqrt{2}$, Théétète doit en avoir donné une démonstration plus solide que celles qui se sont présentées immédiatement à la pensée des Pythagoriciens. Or nous venons de dire qu'au lieu d'une véritable démonstration la proposition 9 contient un renvoi au VIIIe livre, et en particulier à sa proposition 11. Celle-ci est presque inséparable des autres parties du même livre, qui en contient encore plusieurs généralisations notables, et sa démonstration rigoureuse ne devient possible qu'au moyen de la théorie développée dans le VIIe livre. C'est donc là qu'il faut chercher les principaux mérites de Théétète, et certainement on les y trouvera; car quand même ce livre contiendrait aussi des additions dues à des successeurs et en particulier à Euclide, celles-ci n'ont pas pu apporter des améliorations

[1] Voir Euclide, éd. Heiberg, t. V p. 450.

essentielles en ce qui concerne la démonstration en question. De telles améliorations auraient en effet transféré à un autre l'honneur attribué à Théétète par Platon, ce qu'on n'aurait pas manqué de faire remarquer. Nous aurons donc à nous occuper des livres VII et VIII.

Mais avant de quitter le X[e] livre nous ferons remarquer encore que nous ne pensons nullement dénier à Théétète la part qu'on lui attribue ordinairement dans la constitution des parties subséquentes de ce livre et en particulier dans la construction et la classification des différentes quantités irrationnelles par racine carrée. Tout en se bornant à en mentionner le point de départ, Platon peut très bien avoir pris en considération toutes les contributions que Théétète a faites à cette théorie. Il est impossible du reste de les distinguer de ce qui n'est dû qu'à Euclide.

Nous allons donner un aperçu des propositions des livres VII et VIII; mais afin d'apercevoir dès la lecture de cette longue série les rapports qu'elles peuvent avoir avec la démonstration de l'irrationalité des racines, il sera bon de se rappeler ce que nous demandons aujourd'hui à la même démonstration. Nous disons que $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$, où p et q sont des nombres premiers entre eux, est irrationnelle si p et q ne sont pas des n^{mes} puissances de nombres entiers. C'est là une conséquence des deux théorèmes suivants: I) deux fractions égales et réduites à leurs plus petits termes ont même numérateur et même dénominateur, et II) si r et s sont des nombres premiers entre eux r^n et s^n seront aussi premiers entre eux. Ces deux théorèmes sont des conséquences de l'univocité de la décomposition d'un nombre donné en facteurs premiers, laquelle résulte du théorème énonçant III) qu'un nombre premier qui divise un produit divise un des facteurs. Pour y arriver on fait ordinairement usage de l'algorithme servant à la détermination de la plus grande commune mesure de deux nombres: il en résulte 1° qu'un facteur commun à deux nombres est aussi facteur de leur plus grande commune mesure, 2° qu'on obtient la plus grande commune mesure du produit ab et du produit bc en multipliant la plus grande commune mesure de a et c par b. Or, si a et c sont premiers entre eux leur plus grande commune mesure est 1. Celle de ab et bc sera donc b, qui doit par conséquent être divisible par c, si c est facteur de ab.

L'aperçu suivant montre que VII, 19 et 27 contiennent les théorèmes I et II demandés ici (le premier généralisé), tandis qu'une démonstration différente permet à Euclide de remettre à VII, 30 l'énoncé de celui (III) dont on se sert à présent pour les établir.

Le VII^e livre d'Euclide.

Nous ne nous arrêterons pas à la plupart des définitions. Une partie ne font qu'introduire les mêmes notions que nous désignons aujourd'hui de la même manière, telles que: unité, nombre, mesure, multiple, nombre pair et impair, premier, composé, nombres premiers entre eux; d'autres sont inutiles dans cette étude, où, en désignant les nombres entiers par des lettres, nous cherchons à faciliter la lecture par l'usage des symboles modernes dans les cas où ils rendent suffisamment la pensée. Nous n'avons donc besoin de citer que les définitions suivantes:

3. Un nombre plus petit est une part d'un nombre plus grand s'il le mesure ($a = \frac{1}{n} b$, si $b = na$);
4. mais des parts s'il ne le mesure pas[1] ($a = \frac{m}{n} b$).
20. Des nombres sont proportionnels si le premier est du deuxième et le troisième du quatrième soit le même multiple, soit la même part, soit les mêmes parts ($a : b = c : d$ si $a = \frac{m}{n} b$, $c = \frac{m}{n} d$).

Nous reproduirons plus tard les définitions 16 et 18 dont nous aurons à faire un usage spécial.

[1] Euclide ne semble pas toujours retenir la supposition peu essentielle que $a < b$ et par conséquent $m < n$. Voir Heath II p. 306.

A première vue la définition 20 ne semble rien dire de plus sur les propositions numériques que ce qu'on aura en y appliquant la définition générale des proportions (Euclide V, définitions 5—6) énonçant que $a : b = c : d$ si les comparaisons $na \gtreqless mb$ et $nc \gtreqless md$ se conditionnent mutuellement. L'hypothèse $na = m^b$ se réfère même expressément à une telle application. Il faut donc s'attendre à ce qu'en faisant usage des notions définies en 3 et 4 Euclide veuille aussi attribuer un nouveau sens aux proportions dont il va s'occuper dans ce livre. Cependant on n'en apprend immédiatement rien par les définitions, qui ne sont, comme ordinairement dans les Éléments, que des introductions de certaines dénominations sans aucune limitation précise de la notion définie. De même que, dans le premier livre, la définition d'une droite ne fait qu'introduire cette notion, dont on ne trouve les propriétés caractéristiques que dans les postulats, on ne saura, dans le livre VII, le véritable sens des mots „des parts" introduits par la définition 4 et des mots „les mêmes parts" dans la définition 20 qu'en apprenant dans la proposition 4 l'opération servant à déterminer „les parts" que a est de b.

Nous avons déjà mentionné les n^os^ 1—3 du livre, où on cherche, de la manière ordinaire, la plus grande commune mesure de deux ou plusieurs nombres, y compris (n° 1) la condition d'être premiers entre eux, ainsi que le corollaire à 2, énonçant qu'une mesure commune de deux nombres est aussi mesure de leur plus grande commune mesure.

4. Un nombre plus petit (a) est toujours soit une part, soit des parts d'un nombre plus grand (b).

Euclide le démontre en cherchant quelles parts et combien de parts, ce qu'il trouve en divisant a et b par leur plus grande commune mesure f (si $a = mf$, $b = nf$, on aura $a = \frac{m}{n} b$). Quant au cas où a est „une part" de b nous nous contenterons ici et dans la suite de le regarder comme un cas particulier (où $m = 1$).

C'est ici qu'on apprend le sens précis des mots „des parts" de la définition 4, à savoir la fraction irréductible $\frac{m}{n}$ dont le numérateur et le dénominateur m et n sont déduits des nombres donnés a et b de la manière expressément indiquée dans la démonstration de 4. Le véritable noyau logique dont sortira ensuite toute la théorie, c'est l'univocité de cette détermination, lorsque a et b sont donnés, univocité qui résulte de celle de la plus grande mesure. La détermination de cette mesure est ainsi un fondement de la théorie d'Euclide comme elle l'est de la démonstration moderne que nous venons de rappeler. Cependant on ne connaît encore l'univocité de la détermination de m et n que dans le cas où et a et b sont donnés tous les deux; mais il faut ensuite démontrer que m et n dépendent seulement du rapport de a et b, ou qu'ils restent inaltérés, si l'on remplace a et b par deux nombres c et d qui ont le même rapport dans le sens défini au Ve livre, dont la définition d'une proportion, dans ce cas où a, b, c, d sont des nombres, peut être remplacée par $ad = bc$. Pour y parvenir, et jusqu'à ce qu'il y parvienne dans le no 19, Euclide se sert dans le VIIe livre de la nouvelle définition 20, d'après laquelle on ne dit que $a:b = c:d$ que dans le cas où les nombres m et n qu'on déduit de la manière indiquée en 4 de a et b, sont les mêmes que ceux qu'on deduit de c et d. Voilà ce qu'il ne faut pas oublier pendant la lecture des nos suivants.

5. Si $a = \frac{1}{n} b$, $c = \frac{1}{n} d$, alors aussi $a + c = \frac{1}{n}(b + d)$.

6. Si $a = \frac{m}{n} b$, $c = \frac{m}{n} d$, alors aussi $a + c = \frac{m}{n}(b + d)$. Euclide le démontre au moyen de 5 en décomposant a et c en leurs m parties égales.

7. Si $a = \frac{1}{n} b$, $c = \frac{1}{n} d$, alors aussi $a - c = \frac{1}{n}(b - d)$.

8. Si $a = \frac{m}{n} b$, $c = \frac{m}{n} d$, alors aussi $a - c = \frac{m}{n}(b - d)$. Démontré au moyen de 7.

9. Si $a = \frac{1}{n} b$, $c = \frac{1}{n} d$ et $a = \frac{p}{q} c$, alors aussi $b = \frac{p}{q} d$. — On voit, en effet, que $b = a + a + a + \ldots$ (n termes), $d = c + c + c + \ldots$ (n termes), et le théorème devient ainsi une conséquence des nos 5 et 6.

10. Si $a = \frac{m}{n} b$, $c = \frac{m}{n} d$, et $a = \frac{p}{b} c$, alors aussi $b = \frac{p}{q} d$. Il résulte en effet de 9 que, si $\frac{a}{m} = \frac{p}{q} \frac{c}{m}$, aussi $\frac{b}{m} = \frac{p}{q} \frac{d}{m}$.

11. Si $a:b=c:d$, on aura aussi $a-c:b-d=a:b$. Selon la définition 20 conséquence immédiate des n^os 7 et 8.
12. Si $a:b=c:d=e:f\ldots$, on aura aussi $a:b=(a+c+e\ldots):(b+d+f\ldots)$. Conséquence de 5 et 6.
13. Si $a:b=c:d$, aussi $a:c=b:d$. Conséquence de 9 et 10.
14. Si $a:b=c:d=e:f$, aussi $a:e=b:f$.
15. Si $1:b=c:d$, aussi $1:c=b:d$. Compris à 13, mais après division de d en b parts, qui seront égales à c, Euclide le déduit de 12.
16. $ab=ba$. Conséquence du n^o 15.
17. $a:b=ac:bc$ (où c est le multiplicateur). En effet, $a:ac=b:bc$ parce que $a=\frac{1}{c}ac$, $b=\frac{1}{c}bc$, (déf. 20), et le théorème résulte ensuite de l'interversion prouvée dans le n^o 13.
18. $a:b=ca:cb$, résulte de 16 et 17.
19. Si $a:b=c:d$, on aura $bc=ad$, et inversement. De $a:b=c:d$, il résulte en effet, selon les n^os 17 et 18, que $ac:bc=ac:ad$ d'où Euclide conclut que $bc=ad$; et inversement si $bc=ad$, Euclide en conclut que $ac:bc=ac:ad$, d'où il résulte selon les mêmes n^os que $a:b=c:d$.

Nous voyons ici que de $e:f=e:g$ Euclide tire la conclusion que $f=g$, et inversement, sans s'appuyer sur aucun théorème déjà démontré dans le même livre. On a donc cherché dans le V^e livre la justification de ces conclusions, et même M. Heiberg renvoie à V, 9 et 7[1]; mais le dernier de ces renvois ne pourrait donner à la dernière partie du théorème 19 qu'une portée trop restreinte, et démontrer seulement que $ad=bc$ amène la proportion $a:b=c:d$, définie comme au V^e livre, et non pas, comme pour les proportions déjà démontrées dans le VII^e livre, qu'il existe des nombres m et n déterminés comme au n^o 4 tels que $a=\frac{m}{n}b$, $c=\frac{m}{n}d$. Le renvoi serait un cercle vicieux; car l'importance logique du n^o 19 consiste précisément en ce qu'on y établit que la définition d'une proportion donnée dans le V^e livre a, si on l'applique à des nombres entiers, tout à fait la même portée que la définition donnée au VII^e livre. Il faut donc croire qu'Euclide regarde les deux conclusions en question comme des conséquences immédiates de la définition du VII^e livre, et

[1] Euclide, édition Heiberg II p. 229. — Comme je l'ai déjà dit (p. 400) je me suis aussi mépris moi-même sur la valeur logique du VII^e livre.

en cela il n'a pas tort.[1] On voit encore qu'après le n° 19 tout emprunt au cinquième livre est permis, et qu'il n'y a pas lieu de s'étonner si Euclide ne refait pas pour les nombres entiers toute la théorie des proportions. La réduction (4) d'une fraction donnée à ses plus petits termes étant univoque, Euclide a démontré ici que les réductions de deux fractions égales à leurs plus petits termes conduisent elles aussi au même résultat.

Euclide passe ensuite à la théorie de la décomposition des nombres en facteurs et établit en particulier les théorèmes sur l'univocité de la décomposition d'un nombre donné en facteurs premiers. C'est sans doute par égard pour la question de l'irrationalité que le n° 27 précède le théorème plus fondamental 31. — L'interversion de deux facteurs[2] est déjà démontré au n° 16.

20. Si $a:b = c:d$ et si a et b sont les plus petits nombres qui présentent ce rapport, alors a et b mesureront respectivement c et d. — En effet, si $a = \frac{m}{n}c$, alors aussi, selon le n° 13, $b = \frac{m}{n}d$, et on aurait (n° 12) $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$, où pour $m > 1$, $\frac{a}{m} < a$, $\frac{b}{m} < b$.
21. Les nombres premiers entre eux sont les plus petits qui aient le même rapport. — Conséquence de 20 et 15.
22. Le théorème inverse se démontre par antithèse. On fait usage du n° 17.
23. Un nombre qui mesure l'un de deux nombres premiers entre eux est premier à l'autre.
24. Le produit ab de deux nombres a et b premiers à un troisième c est aussi premier à celui-ci. Essayons, en effet, de poser $ab = d \cdot f$, $c = e \cdot f$. Alors (19) $f : a = b : d$. Or f, qui mesure c, doit être premier à a et b (23). f et a ont donc, entre les nombres qui ont le même rapport, les plus petites valeurs (21); ils devraient donc mesurer b et d (20), ce qui est impossible, parce que f et b sont premiers entre eux.

De ce théorème fondamental Euclide déduit ensuite:

[1] Telle est aussi l'opinion de M. Heath, bien que le savant anglais n'ait pas observé la particularité de la définition VII, 20, qui, selon nous, demande l'indépendance des théorèmes démontrés dans le V[e] livre.

[2] Dans sa 5[e] réplique citée, Théétète distingue entre multiplicateur et multiplicande. Serait-ce parce que leur commutation n'appartient qu'à ce qu'il veut démontrer?

25. Si a et b sont premiers entre eux, a^2 et b seront également premiers entre eux.[1] (24.)
26. Si a et b sont tous les deux premiers à c et à d, alors ab sera premier à cd. (24.)
27. Si a et b sont premiers entre eux, a^n et b^n seront également premiers entre eux. — Dans la démonstration, Euclide se borne aux cas $n = 2$ et 3.[2] (24 et 26.)
28. Si a et b sont premiers entre eux, alors aussi $a + b$ sera premier à a et à b.
29. Un nombre premier est premier à tout autre nombre qu'il ne mesure pas.
30. Un nombre premier qui mesure un produit de deux facteurs mesure un de ces facteurs. (29, 19, 21, 20.)
31. Tout nombre composé a pour facteur quelque nombre premier.
32. Ou un nombre est premier ou il a pour mesure un nombre premier. (31.)
33. Plusieurs nombres étant donnés, trouver les plus petits nombres qui aient le même rapport.
34. Deux nombres étant donnés, en trouver le plus petit commun multiple.
35. Un multiple commun à deux nombres est aussi multiple de leur plus petit commun multiple.
36. Trois nombres étant donnés, en trouver le plus petit commun multiple.
37. Si $a = b \cdot c$, alors $c = \frac{a}{b}$.
38. Si $c = \frac{a}{b}$, alors $a = b \cdot c$.
39. Trouver le plus petit commun multiple de nombres donnés.

VIIIe livre.

Dans les nos 19 et 27 du VIIe livre Euclide est venu en pleine possession de la condition nécessaire et suffisante de la rationalité de la racine d'une fraction ou d'un nombre entier. Dans le VIIIe livre il s'agit donc seulement d'adapter cette

[1] a^2 désigne ici et dans ce qui suit le produit numérique $a \cdot a$; aussi Euclide ne se sert-il pas d'un carré pour le représenter géométriquement.

[2] M. Heiberg tient aussi pour interpolés les mots qui dans l'énoncé indiquent une continuation illimitée (désignée par nous au moyen de l'exposant arbitraire n). Cette continuation est en tout cas assez évidente pour être passée sous silence par Euclide, qui se borne toujours à des nombres très simples là où le raisonnement resterait le même pour un nombre quelconque. Dans les applications (p. ex. VIII, 2) il fait usage du théorème général.

condition à la manière dont les Grecs exprimaient les puissances et par conséquent aussi les racines, à savoir au moyen de proportions continues. $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ est représenté comme le rapport $\frac{l}{a}$ du dernier terme l au premier terme a d'une série de proportions continues — ou d'une série géométrique — à $n+1$ termes et dont le second terme est b. Nous l'écrirons

$$a : b = b : c = \ldots = k : l,$$

et c'est à cette formule que nous emprunterons les notations dont nous ferons usage dans l'exposé suivant.

1. Si a et l sont premiers entre eux, $a, b, c, \ldots, l$ seront les plus petits nombres présentant le même rapport. — Se démontre d'une manière antithétique au moyen de VII, 14, 21, 20.
2. Le rapport étant donné, trouver les plus petites valeurs possibles des termes $a, b, \ldots, l$. Ce problème se résout au moyen de VII, 17, 18, 22 et 27. L'emploi du dernier théorème montre que le premier et le dernier terme doivent être des $n^{\text{ièmes}}$ puissances; pour $n=2$ et $n=3$ Euclide le déclare expressément dans un corollaire.
3. Si les termes $a, b, \ldots, l$ ont des valeurs *minimae* de ceux qui ont le même rapport, a et l seront premiers entre eux. Se démontre au moyen de VII, 33, VIII, 2, VII, 22 et 27.
4. Plusieurs rapports (différents) étant donnés, trouver la suite des plus petits nombres qui aient ces rapports.
5. $pq : rs = (p : q) \cdot (r : s)$.
6. Si (de nouveau) $a : b = c : d = \ldots = k : l$ et si a ne mesure pas b, il ne mesure pas non plus aucun des autres nombres. Se démontre au moyen de VII, 33, 14 et VIII, 3. Le théorème est du reste un cas particulier de VIII, 2.
7. Si a mesure l, il mesure aussi b. (VIII, 6.)

Ayant vu ici l'identité, entièrement reconnue par Euclide (Corollaire au n° 2), de la formation des proportions continues avec l'élévation à des puissances, et par conséquent de l'intercalation des termes lorsqu'on connaît le premier et le dernier terme avec l'extraction de racines, nous ne nous exposerons pas à des malentendus en appliquant les signes modernes de puissances et de racines à faire apparaître ce qu'Euclide obtient en réalité dans les nos suivants tout en faisant usage des proportions continues. Je commence par faire remarquer que les nos 6 et 7 établissent qu'une fraction ne peut être la racine d'un nombre entier, ou bien que $\sqrt[n]{a}$ n'est pas rationnel (ou bien n'existe pas, car dans ce livre on ne connaît encore que l'existence numérique), si a n'est pas n^{me} puissance d'un nombre entier.

8. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on a aussi $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$, c'est à dire que si l'un existe l'autre existera aussi.

9. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ et 10. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. L'énoncé de 9 est pourtant limité au cas où a et b sont premiers entre eux.

Comme il est question d'existence et que le premier membre des équations est supposé exister (l'intercalation supposée entreprise), les deux théorèmes ne sont pas identiques entre eux.

11. Si $a = c^2$ et $b = d^2$, il existe une moyenne proportionnelle (cd) et le rapport de a et de b est composé de deux rapports égaux à $c : d$

$$a : cd = cd : b = c : d \quad \text{et} \quad a : b = (c : d)\,(c : d).$$

Nous avons rendu plus complètement ce théorème parce que, comme nous l'avons déjà dit, c'est de lui qu'Euclide dérive, dans le X^e^ livre (n° 9) la condition de la rationalité d'une racine carrée. Toutefois il n'est apte immédiatement qu'à en établir une condition suffisante; car il est donné ici que a et b sont des carrés; mais la démonstration fait voir aussi que le carré d'une fraction, qui est le rapport de deux carrés (a et b), restera toujours egal au rapport composé de deux rapports égaux $c : d$, et, réduit à ses plus petits termes, ce produit est toujours égal à une fraction dont les termes sont des carrés. Voilà ce qui a été établi dans le n° 2 et énoncé dans son corollaire. C'est donc plutôt VIII 2 ou VII 27 qui contiennent la véritable démonstration de X, 9. Le n° 12 a la même importance pour les racines cubiques que 11 pour les racines carrées.[1]

[1] Que Nicomaque désigne 11 et 12 comme des théorèmes platoniciens (HEATH t. II p. 363) cela veut seulement dire que Platon les connaît, ce qui concorde bien avec l'usage que Théétète en a fait.

12. Si $a = c^3$ et $b = d^3$, il en existe deux moyennes proportionnelles (c^2d et cd^2) et le rapport $a : b$ est composé de trois rapports égaux à $c : d$.

$$a : c^2d = c^2d : cd^2 = cd^2 : b \text{ et } a : b = (c : d) \cdot (c : d) \cdot (c : d).$$

13. Si $a : b = b : c = \ldots = k : l$, alors aussi $a^n : b^n = b^n : c^n = \ldots = k^n : l^n$, et réciproquement.
14. Si a^2 est une mesure de b^2, a est aussi une mesure de b et réciproquement.
15. Si a^3 est une mesure de b^3, a est aussi une mesure de b, et réciproquement.

16 et 17 sont les théorèmes inverses de 14 et 15.

14—17 font en particulier la base des critères de la rationalité de racines de nombres entiers.

Les théorèmes du livre VIII qui restent encore, et une grande partie de ceux du IX^e livre traitent des nombres semblables et des puissances de nombres entiers, représentés comme termes de proportions continues commençant par 1. Euclide s'occupe de la divisibilité des puissances et des nombres composés de puissances de nombres premiers. Le fondement logique des démonstrations de ces théorèmes étant celui que nous venons de voir, nous n'avons pas besoin de nous en occuper, non plus que des théorèmes tout élémentaires de la fin du livre sur les résultats des calculs appliqués aux nombres pairs et impairs. La démonstration de l'important théorème IX, 20 sur l'infinité du nombre des nombres premiers dépend aussi des théorèmes exactement démontrés sur la divisibilité des nombres, de même que la détermination en 36 d'un „nombre parfait". La détermination en 35 de la somme d'une série géométrique a trouvé place ici à cause de l'usage qu'on en fait en 36.

Notre commentaire du VII^e livre a mis en relief la volonté d'établir le fondement d'une démonstration exacte des conditions nécessaires et suffisantes de la rationalité des racines de fractions et de nombres entiers, et on a vu qu'à cet effet il fallait établir des théorèmes sur l'univocité de la décomposition d'un nombre entier en des facteurs premiers. Euclide y rattache, surtout à la fin du livre, les démonstrations de théorèmes utiles pour le calcul appliqué à des rapports et identique à notre calcul des fractions; mais ces démonstrations n'auraient pas demandé le même raffinement logique. Au contraire il faut croire que toutes les opérations pratiques dont Euclide fait usage dans ses démonstrations, et en particulier la détermination de la plus grande mesure commune et du plus petit multiple commun, ainsi que la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, étaient bien connues à une époque où on n'avait pas encore observé que l'univocité de cette décomposition n'était pas une vérité intuitive, mais qu'il était à la fois nécessaire et possible de la démontrer. La pratique des dites opérations portait à regarder comme superflue une telle démonstration, et il a même fallu en découvrir la nécessité. Ce qui cause encore aujourd'hui des difficultés aux professeurs de nos écoles, ce n'est pas d'apprendre à leurs élèves la démonstration de l'univocité dont nous parlons, mais de leur faire comprendre la nécessité de la démontrer.

Croyant à cette univocité on a cru aussi, avant la construction de la théorie contenue au VII[e] livre, démontrer l'irrationalité des racines carrés des nombres non carrés. Nous savons qu'on a démontré alors l'irrationalité de $\sqrt{2}$ au moyen de l'axiome énonçant qu'un nombre ne peut être à la fois pair et impair. Il est aussi facile de démontrer l'irrationnalitè de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... au moyen de l'axiome énonçant qu'un nombre ne peut être à la fois divisible et non divisible par 3, 5, ... et même la démonstration connue de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ n'aurait-elle pas servi comme un *instar omnium* pour les autres démonstrations? En tout cas on aura cru avoir démontré ces irrationnalités[1] avant de découvrir ce que demande

[1] A la p. 214 de son „Greek Geometry from Thales to Euclid" Allman résume bien les raisons que l'on a d'attribuer aux Pythagoriciens la con-

une telle démonstration pour être exacte et avant d'inventer, pour les établir rigoureusement, les artifices que nous avons trouvés dans la 1re partie du VIIe livre.

En effet, dans l'évolution des connaissances mathématiques, les progrès n'ont nullement suivi l'ordre logique des systèmes; on n'a pas commencé par les axiomes et l'on n'en a pas déduit successivement les autres vérités. Les Égyptiens et les Grecs et tous ceux qui ont eu occasion de s'occuper de mathématiques possédaient, par exemple, la notion de figures semblables et connaissaient l'égalité numérique des rapports de leurs lignes ou aires avant de posséder le procédé de démonstrations exactes que vint fournir plus tard le postulat d'Eudoxe. Dans son travail plusieurs fois cité, Paul Tannery caractérise ainsi le progrès réalisé par la constitution des Éléments d'Euclide[1]: „La forme des démonstrations devait être [avant ce progrès] aussi rigoureuse, mais le nombre des vérités admises comme primordiales était, sans doute, beaucoup plus considérable, et .... le progrès dut consister, en ce qui concerne le domaine des Éléments, beaucoup moins dans la découverte de propriétés nouvelles que dans la réduction des axiomes". Je ne crois pas qu'il pense à des axiomes ou postulats formulés expressément — on ne les a sans doute formulés qu'à mesure que se réduisait leur nombre — mais plutôt aux hypothèses qu'on s'est cru dispensé de démontrer et même de formuler en les regardant comme intuitives. Les paroles de Tannery expriment alors le même progrès qui a été réalisé par l'élaboration du VIIe livre d'Euclide.

De quelle époque date donc cet important progrès? Nous avons déjà dit qu'on attribue ordinairement les livres arithmétiques des Eléments à la conservation d'une tradition datant

naissance d'autres quantités irrationnelles que $\sqrt{2}$. Il croit même que les démonstrations attribuées à Théodore dans le dialogue ne sont pas des contributions personnelles, mais des doctrines pythagoriciennes.

[1] Géométrie grecque p. 99; Bulletin des Sciences mathématiques 1886, p. 187.

d'une époque antérieure à la réforme de la théorie des proportions due à Eudoxe. L'ancienneté d'une partie du contenu de ces livres est aussi prouvée par une lettre d'Eratosthéne, que nous a conservée Eutocius[1]. Eratosthène nous raconte, en effet, qu'Hippocrate de Chios a réduit la duplication du cube à la détermination de deux moyennes proportionnelles, ce qui veut dire probablement qu'Hippocrate, dans les éléments qu'on lui devait, a représenté les puissances, et par conséquent aussi les racines, de la même manière qu'Euclide dans son VIIIe livre. Beaucoup d'autres détails datent certainement des Pythagoriciens, sauf ce point essentiel qu'on ne leur a pas donné alors un fondement si solide et si raffiné que la première partie du VIIe livre. On s'est dispensé de démontrer l'univocité de la décomposition, et on n'a eu aucun besoin d'une définition des proportions inventée *ad hoc*; il semble qu'on ait défini $a:b = c:d$ par $ad = bc$.

Dans ces conditions, l'invention des définitions du VIIe livre et des démonstrations qu'elles rendent possibles était une innovation de haute valeur. Elle devait être appréciée aussi à l'époque où elle a été faite et où l'on avait déjà reconnu l'insuffisance des anciennes démonstrations. Elle serait donc digne de l'éloge de Platon, qui attribue à Théétète la découverte des vérités démontrées dans ce VIIe livre, et dont aucune autre démonstration nous est conservée. Conformément à la dernière réplique de Théétète que nous ayons citée, la demonstration dans le VIIe livre d'Euclide ne se borne pas aux racines carrées. Comme elle s'étend aussi aux racines de fractions, tandis que les répliques du dialogue n'ont égard immédiatement qu'aux racines des nombres entiers, on pourrait essayer d'en séparer une qui n'ait que cette portée réduite et l'attribuer à Théétète, et attribuer l'extension aux fractions à une généralisation faite postérieurement; mais comme la démonstration conservée vise les fractions dès au

[1] Voir Archimède, éd. Heiberg (première édition) III p. 104.

commencement et dans les parties qui sont fondamentales pour toute la démonstration suivante, une telle séparation est impossible. Il faut donc attribuer à Théétète tous les traits essentiels de la théorie consignée au VII[e] livre d'Euclide.

Il nous semble que les expressions du dialogue confirment aussi une telle explication des répliques citées. Tandis qu'elles attribuent à Théodore un usage plus directe de figures construites, Théétète parle avant tout des differentes sortes de nombres, bien qu'il mentionne aussi les figures auxquelles les noms de ces nombres sont empruntés et qui peuvent servir à les représenter. C'est aussi le VII[e] livre qui contient les définitions des deux sortes de nombres mentionnées dans le dialogue, et abstraction faite de la différence entre le style plus large d'un dialogue de Platon et le style condensé d'Euclide, on y trouvera à peu près les mêmes expressions[1]

Déf. 16. *Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.*	Si deux nombres multipliés l'un par l'autre produisent un nombre, on appelle celui-ci plan, les nombres multipliés côtés.
Déf. 18. *Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴςος ἢ[ὁ]ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.*	Un nombre carré est „également égal" ou bien contenu par deux nombres égaux.

On voit que pendant l'intervalle qui sépare Euclide de Théétète un nombre „rectangulaire" est devenu un nombre „plan", mais, par exemple, la singulière combinaison *ἰσάκις ἴσος* a été conservée. A l'allusion faite à la fin de la dernière réplique citée de Théétète correspondent de même dans le VII[e] livre les définitions de nombres solides (17) et de nombres cubes (19). Quant aux notions mentionnées au

[1] Nous ne faisons ici que signaler l'usage commun d'expressions dont sans doute la plupart étaient pythagoriciennes.

commencement de la même réplique, telles que μῆκος, et qui ont égard à la représentation géométrique des quantités, Euclide les a reservées pour le X^e livre, où il les combine avec son nouvel usage technique de l'ancien mot ῥητός, que les Pythagoriciens avaient employé pour exprimer en général les quantités rationnelles, celles qu'on peut exprimer par des nombres, mais qui allait être banni (comme à peu près à la même époque le mot ἄπειρος) une fois que Théodore eut rattaché les notions de la commensurabilité et de l'incommensurabilité à des définitions plus précises. Aussi Aristote évite-t-il l'usage du mot ῥητός (voir la table de la terminologie de M. Vogt), et ses expressions, qui se rapportent directement à la possibilité de représenter les grandeurs par des nombres, nous semble indiquer que c'est cette possibilité, plutôt que la représentation géométrique, qui a occupé les mathématiciens immédiatement antérieurs à lui.

En ce cas les mérites de Théodore seraient la découverte de l'insuffisance des démonstrations antérieures, l'essai d'y suppléer au moyen de déterminations plus précises attachées aux nouvelles notions à savoir la commensurabilité et l'incommensurabilité, et enfin une démonstration directe de l'incommensurabilité de certaines racines carrées $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... $\sqrt{17}$ à l'unité. Cette démonstration n'a pas été un emploi particulier des mêmes procédés dont se composent les démonstrations générales du VII^e livres d'Euclide; car même en se bornant à parler de ces nombres particuliers on n'éviterait pas de faire paraître la portée générale de la démonstration, et alors les Grecs, accoutumés à se servir de nombres simples 2, 3 ... pour montrer ce qui a lieu pour un nombre quelconque, auraient été satisfaits de ces exemples. Quelles seraient donc les démonstrations de Théodore? D'après les répliques du dialogue, elles semblent avoir eu une forme plus géométrique que celles de Théétète-Euclide, et il faut croire qu'elles se rattachaient aux notions introduites par Théodore.

Or Euclide nous indique dans les premières propositions du X^e livre, dont nous avons parlé au commencement de cet article, un moyen d'éprouver la commensurabilité de deux grandeurs. Le n^o 2 énonce expressément que deux quantités sont incommensurables si l'essai d'en trouver la plus grande mesure par le procédé ordinaire n'aboutit jamais. Après cela le lecteur attentif s'étonne que ce critère, dont l'utilité pratique, par exemple pour démontrer l'incommensurabilité du côté du décagone régulier, saute aux yeux, ne soit jamais mis en œuvre, mais qu'il figure seulement comme une explication théorique. Au contraire, sitôt qu'il s'agit de documenter la véritable incommensurabilité de quantités concrètes, Euclide renvoie aux démonstrations numériques des livres précedents. Il en a raison parce que ces démonstrations sont générales et rendent superflu l'usage du X, 2. Cependant la raison d'être de ce critère doit avoir été originairement l'intention d'en faire usage, et qui aurait réalisé cette intention mieux que Théodore, lequel à introduit la notion de l'incommensurabilité, et ne connaissait pas encore la démonstration générale?

En ce cas les démonstrations relatives à $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ ne lui auront pas causé de difficultés insurmontables, ce que nous allons montrer.

Commençons, par exemple, par considérer la série de restes qu'on obtient en cherchant la plus grande commune mesure de $\sqrt{5}$ et de 1 — opération identique à celle dont on fait usage pour développer $\sqrt{5}$ en fraction continue —. On écrirait à présent cette série:

$$\sqrt{5}\,,\ 1,\ \sqrt{5}-2\,,\ (\sqrt{5}-2)^2,$$

et comme les deux derniers termes ont le même rapport que le 2^e et le 3^e, on voit immédiatement que la série se continuera sans fin, ce qui montre, selon Euclide X, 2, que $\sqrt{5}$ et 1 sont incommensurables. Or, l'équation:

$$1 = (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 4\cdot(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)^2,$$

qui nous fournit le dernier reste, se présente, si nous substituons 1^2 au premier membre, aussi immédiatement qu'à nous à celui qui fait usage de l'algèbre géométrique du II^e livre des Éléments. Soient, en effet, $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = \sqrt{5}$ (construit comme $\sqrt{2^2 + 1}$). Construisons les carrés AG et AI; alors les trois premiers termes sont AD, AB, CD. Le gnomon $EIDCGF$ sera $1^2 \,(= 5 - 2^2)$ et sera composé des rectangles $EG + GD = 4 \cdot CD$ et du carré $GI = CD^2$, ou bien, AB étant égal à 1,

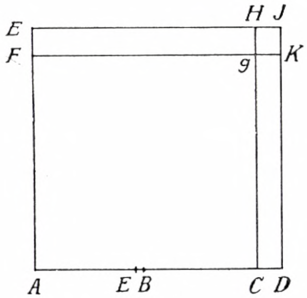

Fig. 1

$$AB = 4 \cdot CD + \frac{CD}{AB} \cdot CD.$$

En posant $AE = 4CD$, le reste de division EB sera donc déterminé par $AB : CD = CD : EB$. Les restes vont donc former une proportion continue.

Les démonstrations des irrationalités de $\sqrt{10}$ et $\sqrt{17}$ se présentent évidemment sous la même forme simple, ce qui a été peut-être un motif pour finir par la dernière de ces démonstrations (l'irrationalité de $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ était évidente sans aucune démonstration nouvelle).

Appliquons ensuite le même procédé à $\sqrt{3}$. Les termes de la série servant à trouver la plus grande commune mesure de $\sqrt{3}$ et 1 seront alors

$$\sqrt{3}\,,\ 1\,,\ \sqrt{3} - 1\,,\ \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)^2,\ \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)^3,$$

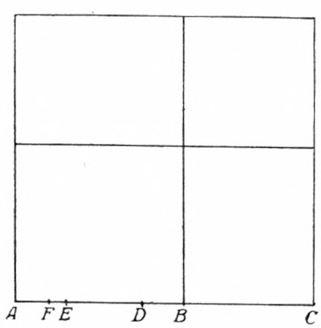

Fig. 2

et comme le rapport du 5^e terme au 4^e est égal à celui du 3^e au 2^e, cette série se continuera aussi sans fin.

Les anciens ont pu voir la même chose en se servant de la fig. 2, où, si $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, et $AD = BC$, les 4 premiers termes seront:

$$AC,\ AB,\ BC = AD \text{ et } DB = AB - BC = AE.$$

Le gnomon étant ici $(\sqrt{3})^2 - 1 = 2 = 2AB^2$, on aura:

$$2AB^2 = 2AB \cdot BC + BC^2$$

ou bien:

$$AE = DB = \frac{1}{2}\frac{BC^2}{AB} = \frac{1}{2}\frac{AD^2}{AB}.$$

Afin de trouver le reste suivant AF il faut soustraire $2DB$ de AD. On trouvera:

$$AF = AD - 2DB = \frac{AD}{AB}(AB - AD) = \frac{AD}{AB} \cdot DB = \frac{AD}{AB} AE$$

ou bien:

$$AF : AE = AD : AB.$$

On aura pu donner quelque autre forme à cette démonstration en se servant deux fois de la connaissance des gnomons; mais en tout cas cette connaissance qui équivaut à l'usage de la formule $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, dont on se sert continuellement en développant les racines carrées en fractions continues, a pu suffire pour démontrer de la même manière l'irrationalité des racines $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ..., $\sqrt{17}$.

Si Théodore n'a pas appliqué le même procédé à la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, il a dû regarder la proposition: „un nombre ne peut être à la fois pair et impair“ comme assez évidente pour être toujours regardée comme axiome. Il est du reste fort probable que même avant Théodore on s'est servi du dit procédé, sinon pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$, du moins pour en trouver des approximations, et que par cette voie on a obtenu originairement la série connue et assez antique d'approximations $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, ... Ces valeurs sont, en effet, les convergentes de la fraction continue qui exprime la valeur de $\sqrt{2}$. La démonstration de la formation de ces valeurs qu'Euclide nous a conservée (II, 9 et 10) porte en effet la marque d'avoir été faite pour constater la justesse d'un procédé déjà connu.

Tout en s'arrêtant à $\sqrt{17}$, Théodore a sans doute attendu qu'il lui fût possible de démontrer de la même manière l'irrationalité des racines carrées des nombres non carrés suivants. Connaissant à présent la périodicité des fractions continues servant à exprimer les racines carrées des nombres non carrés, nous savons qu'une telle attente ne serait pas trompée; mais le dialogue de Platon nous montre qu'en tout cas Théodore n'a pas su démontrer la généralité de la périodicité qui s'était présentée à lui dans les cas les plus simples.

L'attribution à Théodore du procédé indiqué en dernier lieu n'est qu'une hypothèse; mais elle correspond de tous points aux renseignements historiques qui nous sont parvenus, à notre connaissance des méthodes des anciens et en particulier à ce fait qu'Euclide indique expressément la méthode en question sans en faire lui-même aucune application, ce que les démonstrations arithmétiques des livres VII — VIII avaient rendu superflu à son époque.

Ce qui n'est pas une hypothèse historique, mais ce qui ressort de l'étude des Éléments d'Euclide, c'est l'esprit de finesse logique qui a présidé aux démonstrations que l'on trouve dans le VIIe livre d'Euclide. Le témoignage de Platon nous a porté à attribuer ces démonstrations à Théétète, et de la sorte celui-ci aura mérité aussi d'être inscrit au „Catalogue des Mathématiciens“ contenu dans les commentaires de Proclus, lequel nous dit que Théétète augmenta le nombre des théorèmes et en fit „un ensemble plus scientifique“. Cela n'empêche pas qu'Hermotime de Colophon, qui d'après la même source „poursuivit les découvertes d'Eudoxe et de Théétète“, et Euclide y ont ajouté quelque détail pour donner aux livres arithmétiques la forme définitive que nous trouvons dans les Éléments. Du reste c'est plutôt pour les contributions de Théétète aux Xe livre qu'une continuation de ce genre à eu lieu.

Le parallèle suivant entre la contribution d'Eudoxe aux Éléments et celle que nous attribuons à Théétète n'aura pas échappé aux lecteurs. Eudoxe fonde sa théorie des proportions sur une définition générale (V, 5, ayant recours à V, 4), qui en fait la base d'une théorie exacte des grandeurs continues; dans le livre VII on prend pour point de départ des démonstrations exactes de l'irrationalité et d'une théorie exacte des nombres entiers une définition particulière des proportions numériques (VII, 20, ayant recours à VII, 3 et 4). A cet usage commun de définitions on reconnaît la technologie développée à l'époque attique, à laquelle appartiennent et Théétète et Eudoxe. Théétète, qui est le plus ancien, n'aurait pas probablement osé après Eudoxe établir par sa définition une notion dont la portée était plus restreinte que celle à laquelle Eudoxe a donné le même nom. Il ne fit que commencer par caractériser autrement une notion qui se montra ensuite (VII, 19) identique à celle qu'on possédait déjà; mais Euclide, qui a déjà exposé la théorie d'Eudoxe dans les livres V et VI ne sait exposer celle de Théétète qu'en ayant recours, dans la première moitié du VII[e] livre, à sa définition particulière, qui en est un point de départ différent de celui que lui fournirait celle d'Eudoxe.

Le fondement général et exact des proportions n'aurait pas été créé par Eudoxe sans avoir été précédé d'un long usage pratique des proportions. De même, la finesse logique que nous avons reconnue dans le VII[e] livre d'Euclide n'aurait occasion d'apparaître qu'après un long examen des mêmes questions auxquelles ces livres donnent une base solide. On doit s'être occupé longtemps de l'irrationalité des racines avant que Théodore ait reconnu la nécessité de l'assurer par des démonstrations plus rigoureuses que celles qui se présentent immédiatement à celui qui a reconnu l'irrationalité de $\sqrt{2}$, et avant que Théétète lui ait donné un fondement aussi général que sûr. Ces considérations m'inspirent, sur la connaissance antérieure des quantités irrationnelles, des opinions tout-à-fait opposées à celles qui terminent le mémoire de M. Vogt. Longtemps avant Théodore on a dû s'occuper de la question de la rationalité non seulement de $\sqrt{2}$, mais aussi d'autres racines carrées, et probablement aussi de racines supérieures, des nombres entiers et des fractions. Sur cette question, M. Vogt fait observer que des démonstrations historiques et positives nous manquent pour d'autres quantités que $\sqrt{2}$; mais ce qui demanderait avant tout une démonstration historique et directe, c'est cette discontinuité de développement qui aurait eu lieu, si après avoir découvert l'irrationalité de $\sqrt{2}$ on n'avait pas même pensé aux autres racines avant d'en créer une théorie aussi fine que celle dont nous venons de nous occuper. Selon moi la connaissance de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ devait entraîner immédiatement après elle la question de la rationalité des autres racines. C'est peut-être le même sentiment qui porte M. Vogt à n'attribuer qu'aux derniers Pythagoriciens la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Mais pourquoi aux derniers? C'est une assertion positive qui demande une démonstration aussi bien que celle qui attribue cette découverte à Pythagore lui-même. M. Vogt en a une, dont je m'occuperai à la fin de cet article; mais elle est aussi peu décisive que le témoignage de Proclus sur lequel on a cru jusqu'à présent pouvoir appuyer l'attribution à Pythagore. Du reste, n'étant pas philologue, je ne puis pas juger de l'interprétation dont M. Vogt se sert pour éliminer ce témoignage; toutefois je ne sais pas de quelle autre expression que *ἄλογον* Eudème, qui est la source de Proclus, aurait dû se servir pour attribuer à Pythagore la découverte des grandeurs irrationnelles. *ἄῤῥητον*, dans le sens insuffisamment défini par les Pythagoriciens, était hors de cours — peut-être avait-on même déjà commencé d'attribuer au mot *ῥητόν* le sens tout spécial qu'on trouve dans Euclide —, et *ἀσύμμετρον* ou *οὐ* σύμμετρον étaient des notions introduites par Théodore et attachées à des opérations dont les Pythagoriciens ne faisaient pas encore le même usage.

Cependant je conviens qu'il nous manque tout moyen historique de distinguer entre ce qu'on doit à Pythagore et ce qu'on doit à ses disciples plus ou moins immédiats. Je crois même que M. Vogt a raison en disant dans un mémoire antérieur[1], dont les recherches philologiques semblent être exécutées avec le même soin que celles du travail dont je m'occupe ici, que déjà au temps d'Aristote on n'en savait guère davantage. Néanmoins il ajoute: „les traditions historiques et notre intelligence des conditions nécessaires à la naissance d'une science nous permettront d'attribuer à la géométrie des Pythagoriciens sa place dans la géométrie grecque et même de reconstruire le développement qui s'est fait en elle du plus simple au plus complexe.“ Oui!; mais il s'agit alors avant tout de trouver cette place dans la géométrie grecque telle que nous la connaissons par les Éléments d'Euclide, et d'avoir égard aux différents stades des théories qui ont fini par s'y présenter sous une forme développée et consciente. C'est plus sûr que de s'appuyer sur un classement des connaissances d'après le degré de simplicité et les rapports entre elles qu'elles ont à nos yeux. C'est en même temps plus facile; car les progrès successifs des idées, les exigences croissantes des démonstrations, et le développement des moyens pour y satisfaire, vont toujours beaucoup plus lentement que la succession des progrès matériels du savoir à une époque féconde de l'esprit humain. Il ne faut pas croire, par exemple, que la connaissance de l'irrationalité ait provoqué immédiatement tous les raffinements logiques avec lesquels l'a traitée Euclide. Même les scrupules qui ont conduit à ces raffinements ont eu besoin de quelque temps pour se manifester. Le calcul infinitésimal proprement dit existait depuis deux

[1] Die Geometrie des Pythagoras. Bibliotheca mathematica 9_3 p. 52.

siècles avant qu'on eût pensé à lui donner pour introduction une théorie des ensembles.

Nous devons donc, pour reconnaître l'âge de la notion de l'irrationnel, observer avant tout les soins logiques qu'Euclide donne à cette notion et suivre de notre mieux les signes d'une existence et d'un développement antérieurs de ces préoccupations. Nous avons déjà parlé de la théorie générale des proportions et de l'établissement des théorèmes sur les nombres entiers nécessaire pour la rigueur des démonstrations de l'irrationalité des racines. En parlant du X^e livre nous avons vu aussi la manière dont l'existence des grandeurs irrationnelles a été attachée à une représentation géométrique. Cette représentation permet d'y appliquer non seulement les proportions, mais aussi toutes les opérations géométriques des 4 premiers livres des Éléments. L'effort accompli pour en étendre la portée le plus possible sans faire usage des proportions, qui n'avaient pas avant Eudoxe la généralité nécessaire, saute aux yeux dans les Éléments d'Euclide, où par exemple les théorèmes sur la puissance d'un point par rapport à un cercle (III, 35-37) précèdent les proportions. Cela s'obtient au moyen de l'algèbre géométrique, exposée dans le livre II, et que M. Vogt attribue aussi aux Pythagoriciens. Elle place dans le domaine de la géométrie la plus élémentaire les éléments de l'algèbre, y compris des solutions des équations du second degré, et elle présente l'avantage d'être également applicable aux grandeurs rationnelles et irrationnelles, tandis que tout emprunt à l'arithmétique ne serait applicable qu'aux premières. C'est la conscience de cet avantage de la géométrie qui a incité à réduire à des constructions géométriques la quadrature du cercle, la rectification de la circonférence et, ce qui nous intéresse ici, l'extraction des racines carrées et cubiques sous forme de détermination d'une ou de deux moyennes proportionnelles.

Pour constater la grande part que les Pythagoriciens ont eue dans ces derniers efforts, il suffit de renvoyer à la remarquable construction des deux moyennes proportionnelles due à l'un des derniers Pythagoriciens, Archytas.[1] On y admire la force de l'imagination stéréométrique et la sûreté analytique du savant qui ne recule pas devant la nouveanté de la courbe, section d'un tore et d'un cylindre, à l'usage de laquelle il est conduit par son essai pour résoudre son problème par une extension à l'espace de la construction connue d'une moyenne proportionnelle. Il ne poursuivit ainsi aucun but pratique, non plus que ses successeurs dans cette voie, Eudoxe et Ménèchme. Ils ne réussissent, — le dernier par les sections coniques — qu'à donner une existence géométrique à des quantités qui ne se laissent pas exprimer numériquement, et à en faire ainsi des objets d'étude scientifique.

Un tel but ne pouvait être nouveau au temps d'Archytas. On ne se l'est proposé pour les racines cubiques qu'en connaissant depuis longtemps l'avantage obtenu de la sorte pour les racines carrées, et la solution est, comme nous venons de le dire, le résultat d'une extension de celle qui concernait les racines carrées. Cette dernière solution, et l'usage qu'on en tire pour donner un caractère scientifique aux recherches relatives à des quantités pouvant être irrationnelles, devaient donc être bien connus alors, et le progrès qui a conduit à ces résultats a demandé un certain espace de temps. La découverte de l'irrationalité, qui est le point de départ de ce développement ne peut donc appartenir aux derniers Pythagoriciens. J'aime à croire que ce point de départ, qui est en même temps le point de départ du caractère scientifique qui distingue la géométrie grecque de tous les autres ensembles de connaissances mathématiques dans l'antiquité, appartient à Pythagore lui-même, que ses savants élèves n'auraient pas honoré sans motif scientifique sérieux. Aussi doit-on faire

[1] On trouve une description de cette construction dans les traités d'histoire des mathématiques.

remonter jusqu'à lui, — ou à peu près, — une démonstration du théorème général, qui porte son nom, démonstration qui a eu sa valeur, même si Euclide a trouvé nécessaire d'y substituer une autre ne dépendant pas de proportions. Ce théorème est en effet la base de l'algèbre géométrique.

En regardant aussi la généralisation de la théorie des proportions comme un fruit, mûri beaucoup plus tard, de la découverte de l'irrationalité, je dois aussi placer cette découverte avant le grand critique dont les arguments aigus ont signalé l'insuffisance des rapports numériques pour démontrer les propriétés de grandeurs continues, et ont porté les géomètres grecs à effacer le mot *ἄπειρος*, „infini", de leur dictionaires à cause de l'usage insuffisamment fondé qu'on en avait fait. Je pense ici à Zénon d'Elea. Il est vrai que M. JUNGE a objecté à cette considération [1] que la division infinie se présente assez facilement pour avoir pu être inventée sans aucune suggestion fournie par une connaissance antérieure de grandeurs irrationnelles; mais cette objection me fait croire que M. JUNGE n'a pas bien observé ni la force logique ni le caractère polémique des arguments de Zénon. [2] Ce sont à peu près les mêmes que ceux dont se servent aujourd'hui les mathématiciens logiques pour expliquer l'impossibilité de fonder sur des hypothèses (axiomes) concernant exclusivement

[1] L. c. p. 14.

[2] Pour ces deux caractères, je renvoie à l'étude détaillée de PAUL TANNERY dans son ouvrage intitulé „Pour l'histoire de la Science hellène" p 248 ss. Il y a peut-être dans les versions conservées des arguments de Zénon quelque détail qui pourrait s'expliquer autrement que ne le fait TANNERY(?); mais le caractère de vérité que prend chaque proposition de Zénon dans la lumière où la place TANNERY est une preuve de la justesse générale des explications de ce dernier; car on ne dit pas par hasard des vérités profondes. CANTOR fait tort à Zénon (Geschichte I, 3. Auflage, p. 200) en expliquant son dernier paralogisme par un défaut de connaissance des mouvements relatifs. Au contraire Zénon profite du mouvement relatif, — possible si un mouvement quelconque est possible, — pour montrer le paralogisme auquel on arrive en considérant des parties infiniment petites comme des unités.

les objets discrets une théorie embrassant aussi les grandeurs continues, ou bien la nécessité de ce qu'on appelle l'axiome d'Archimède, c'est-à-dire le postulat d'Eudoxe, ou d'un autre axiome équivalent. N'étant pas encore en possession de ce postulat, Zénon accepta, en bon Grec, toutes les conséquences de ses propres hypothèses et nia la continuité et le mouvement. En particulier les arguments de Zénon font paraître l'impossibilité de former des conclusions exactes sur les grandeurs continues au moyen des rapports numériques, et il n'est guère douteux que sur ce point il eût en vue les procédés des Pythagoriciens, qui, même après la découverte de l'irrationalité que selon moi ils avaient déjà faite, se servaient encore dans leurs démonstrations des proportions établies numériquement. Il n'y à rien d'étonnant à cela, car on ne tire pas tout de suite toutes les conséquences d'une découverte et, pour faire de la géométrie, on n'avait pas encore d'autres moyens à sa disposition. Zénon de son côté y a vu plus clair. Il s'est élevé jusqu'à reconnaître toutes les exigences d'une théorie destinée à comprendre aussi les grandeurs continues (dont il niait l'existence parce qu'il ne savait pas satisfaire à ces exigences); mais pas plus alors qu'à présent on ne s'élève à de telles abstractions sans en avoir rencontré des exemples concrets. La qualité des grandeurs continues qui rend impossible de les traiter numériquement, c'est l'incommensurabilité qu'elles présentent en général. Zénon doit avoir connu des exemples concrets de cette incommensurabilité, et avant tout celle qui se manifestait dans les grandeurs représentant les racines carrées. Si les Pythagoriciens n'avaient pas déjà connu et fait connaître aussi à Zénon cette irrationalité particulière, Zénon serait arrivé, sans en avoir eu aucun exemple concret, à la connaissance générale de ce fait qu'il ne faut pas croire que des quantités arbitrairement données soient commensurables.

A l'appui de son attribution de la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ aux derniers Pythagoriciens M. Vogt communique[1] quelques citations de Platon que je ne dois pas passer sous silence. Platon y exprime des regrets sur l'ignorance des Hellènes au sujet des grandeurs irrationnelles, et il ajoute que lui-même en a entendu parler assez tard. Cependant je ne crois pas qu'il soit permis de tirer de là des conséquences sur la nouveauté à son époque des connaissances générales de ces quantités: il peut très bien s'agir d'un phénomène plus local. Il y a sans doute lieu d'admirer la rapidité avec laquelle les vérités mathématiques se sont propagées dans le monde grec d'une région à l'autre; mais c'est exagérer cette diffusion que de nier l'existence d'une connaissance à un endroit parce que quelques années après on n'en trouve pas encore des vestiges à un autre endroit. Une telle conclusion sera peut-être permise au moment où Athènes et plus tard Alexandrie deviendront des centres scientifiques pour tous les Grecs; mais à l'époque dont nous parlons il se fait un déplacement du travail mathématique. Jusqu'alors celui-ci avait été avant tout entre les mains des Pythagoriciens, au midi de l'Italie. Il était connu de leurs adversaires habitant les mêmes contrées, tels que Zénon d'Elea, et s'était propagé aussi jusqu'à Théodore de Cyrène. Une partie des résultats de ce travail a même été portée à Athènes par Hippocrate de Chios, ce qui a permis de conserver jusqu'à nos jours un brillant spécimen de l'ancienne géométrie hellène; mais Platon, qui n'était pas mathématicien professionnel, n'apprit que de Théodore et d'Archytas et des autres derniers Pythagoriciens les derniers résultats du développement qui s'était achevé dans cette école. Théétète et Eudoxe ont suivi les mêmes traces, et en même temps la renommée philosophique de Platon attira aussi d'autres mathématiciens à Athènes; parmi ceux-ci, il y en avait sans doute qui pouvaient y répandre les résultats acquis par les Pythagoriciens. On

[1] P. 136 et s.

s'explique de cette façon que nous ne possédions presque aucun détail sur la suite des progrès qui ont conduit la géométrie au haut degré de développement qu'elle possédait déjà au moment où elle passait d'Italie à Athènes.

N'étant ni philologue ni historien, hors de la connaissance que je tire d'une etude attentive des auteurs mathématiques de l'époque dont je m'occupe, je n'expose ces dernières considérations qu'avec quelque réserve et moins comme un résultat que comme une invitation adressée aux philologues et aux historiens de rechercher tous les indices qui peuvent nous renseigner sur les mouvements locaux de la science mathématique. Cela contribuera aussi à nous faire mieux comprendre l'évolution générale de la science.